Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas
19 de Septiembre de 1997

1. Dígase, en cada uno de los siguientes casos, si existe o no una función f holomorfa en Ω, cumpliendo las condiciones que se indican, y justifíquese la respuesta:

   a) $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $f(i) = 0$, $f(-i) \neq 0$.

   b) $\Omega = D(0,1)$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 0$.

   c) $\Omega = D(0,1)$, $f^{(n} = n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   d) $\Omega = D(0,2)$, $\text{máx}\{|f(z)| : |z| = 1\} = 1$, $f(0) = 2$.

2. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z)}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \pi/2$ $(0 < \varepsilon < 1 < R)$, calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

3. Determinar el número de ceros del polinomio

$$z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1$$

   en el semiplano de la derecha y en el disco unidad.

4. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \left| z + \frac{5}{4} i \right| > \frac{3}{4} \right\}$$

   sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.